

MAI 2 3.cvičení - výpočet primitivní funkce (neurčitý integrál).

(Najděte primitivní funkce na maximálních intervalech)

1. Jednoduché příklady na výpočet primitivní funkce :

a) (užití tabulky primitivních funkcí a výpočet integrálu násobku funkce a součtu funkcí)

$$\int (3e^x + \frac{1}{x}) dx ; \int (5\sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2 x}) dx ; \int (\sqrt[3]{x} + x^5) dx ; \int \frac{x^3 - 1}{2x} dx ; \int \frac{(1-v)^2}{v\sqrt{v}} dv ;$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx ; \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx ; \int \operatorname{tg}^2 u du .$$

b) Je-li $\int f(x) dx = F(x) + C$ na intervalu I , pak, na odpovídajícím intervalu je

$$\underline{\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a > 0 :}$$

$$\int e^{-x} dx ; \int \cos(3x + 2) dx ; \int 4^x dx ;$$

$$\int (3x - 2)^6 dx ; \int \sqrt{3x - 2} dx ; \int \sqrt[3]{1 - 2x} dx ; \int \sqrt[3]{(1 - 2x)^2} dx ; \int \frac{1}{5 - x} dx ; \int \frac{1}{(3x + 1)^5} dx ;$$

$$\int \frac{1}{4 + x} dx ; \int \frac{1}{4 + x^2} dx ; \int \frac{1}{1 + 4x^2} dx ; \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx ; \int \frac{1}{x^2 + 4x + 7} dx ;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - 9x}} dx ; \int \frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx ; \int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx ;$$

$$\int \sin^2 x dx ; \int \cos^2 x dx .$$

2. 1. věta o substituci:Nechť : (i) funkce f má na intervalu (a, b) primitivní funkci F (nebo-li $\int f(t) dt = F(t) + C$ na (a, b))a (ii) funkce g je definovaná na intervalu (α, β) , $g(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ a g má vlastní derivaci v každém bodě z (α, β) .Pak
$$\underline{\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \text{ na } (\alpha, \beta) .}$$

$$\int 2xe^{x^2} dx ; \int 2xe^{-x^2} dx ; \int x \sin(x^2) dx ; \int x^2 \cos(x^3) dx ; \int x\sqrt{1-x^2} dx ; \int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}} dx ;$$

$$\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx ; \int e^x \sin(e^x) dx ; (*) \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2} dx$$

$$\int \frac{1}{x^3} \exp(\frac{1}{x^2}) dx ; \int \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(\sqrt{x}) dx ; \int \cos x \cdot \exp(\sin x) dx ;$$

$$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}} dx ; \int \frac{\ln^2 x}{x} dx ; \int \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)} dx \int \frac{\ln x}{x \cdot (1 + \ln^4 x)} dx \text{ (stejně i } \int \frac{x}{1 + x^4} dx \text{)} ;$$

$$\int \cos^3 x \cdot \sin x dx ; \int \sin^3 x dx ; (*) \int \frac{1}{\sin x} dx ; (*) \int \frac{\cos^3 x}{2 + \sin x} dx ;$$

Spec. $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C$ na intervalu, kde je $g(x) \neq 0$:

$$\int \frac{2x}{4+x^2} dx; \int \frac{x^3}{1+x^4} dx; \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx; \int \frac{x-3}{x^2+4x+5} dx; \int \frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} dx;$$

$$\int \frac{\sin x}{5+\cos x} dx; \int \operatorname{tg} x dx; \int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx; \int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)} dx.$$

3. Integrace „per partes“:

Jsou-li funkce f a g spojité na intervalu (a, b) , a je-li F primitivní funkce k f na (a, b) a G primitivní funkce ke g na (a, b) , potom na (a, b) platí:

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x) dx$$

nebo jiná (často užívaná) „verze“ věty o integraci per partes:

Jsou-li funkce u' a v' spojité na intervalu (a, b) , pak na (a, b) platí:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

a) $\int x \sin x dx; \int x^2 \cos x dx; \int x^3 \ln x dx; \int x \ln^2 x dx; \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx;$

b) $\int \ln x dx; \int \ln^2 x dx; \int \frac{1}{x} \ln x dx;$

c) $\int \sin^2 x dx; \int \cos^2 x dx; \int e^x (\sin x + \cos x) dx; \int \sqrt{1-x^2} dx;$

d) per partes + substituce:

$$\int \operatorname{arctg} x dx; \int x \cdot \operatorname{arctg} x dx; \int \arcsin x dx; \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx; \int \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx; \int \arcsin^2 x dx.$$

4. „Slepování“ primitivních funkcí:

a) najděte $\int |x| dx; \int \sqrt{x^6} dx; \int |\sin x| dx \quad \forall R;$

b) najděte v R primitivní funkci k funkci f , je-li

i) $f(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $f(x) = 2x$ pro $x > 0$; ii) $f(x) = x$ pro $x \leq 0$ a $f(x) = \sin x$ pro $x > 0$;

iii) $f(x) = -x$ pro $x \leq 0$ a $f(x) = x^2$ pro $x > 0$;

5. Ukažte, daná funkce nemá v R funkci primitivní:

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$; b) $f(x) = x$ pro $x \leq 0$ a $f(x) = 2x+1$ pro $x > 0$.